Paracuru-CE

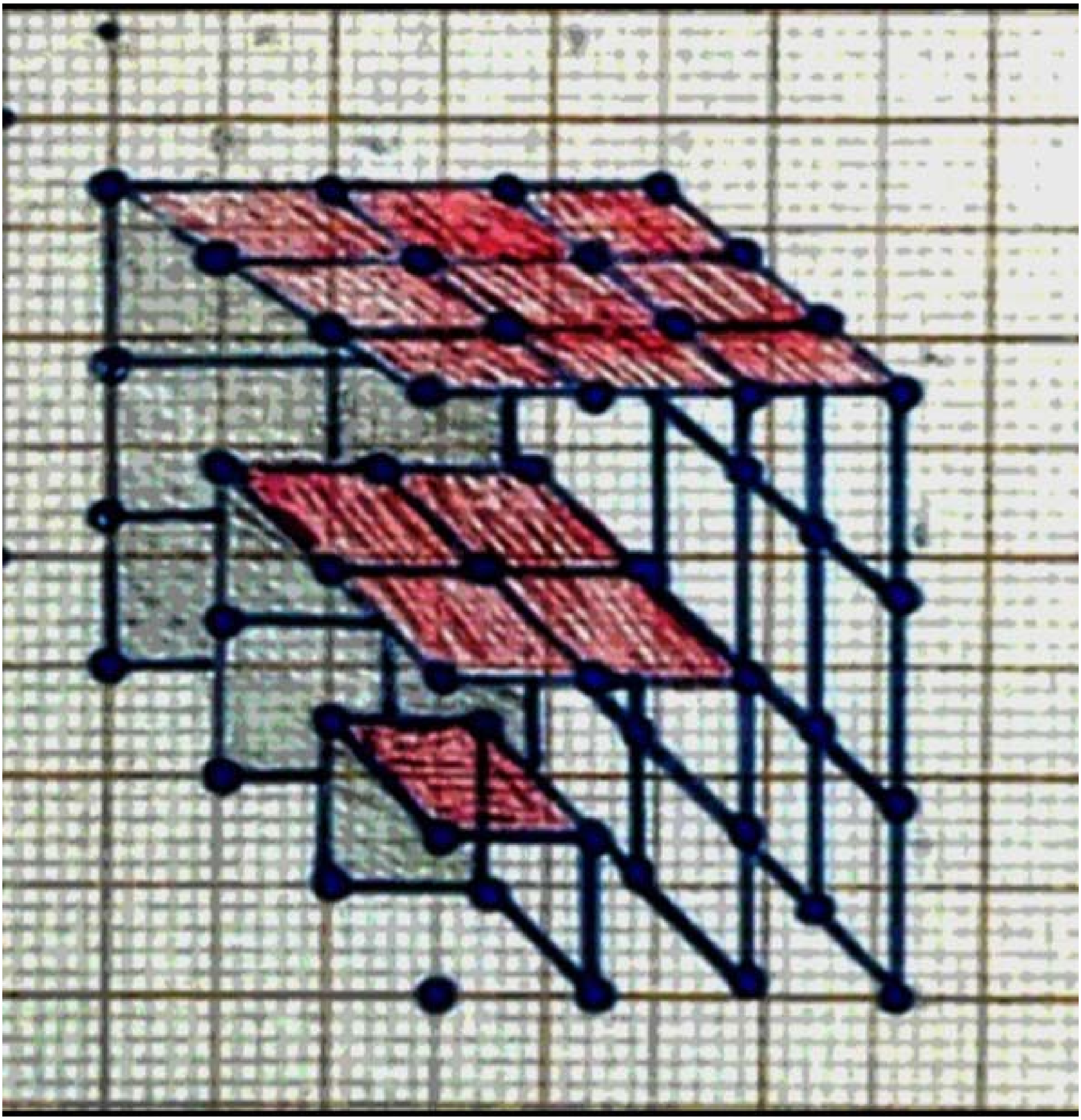
Data: 28/01/2025

Autor: David Dias Marques

E-mail: davidmarquesdias4@gmail.com

Título: 004 - As camadas inteiras que compõem os números cúbicos perfeitos

Recentemente, enquanto pensava sobre os quadrados perfeitos, perguntei a mim mesmo: Se a soma de uma quantidade determinada de números ímpares gera valores quadrados perfeitos, que outra sequência especial de números, que somados, gerariam números cúbicos perfeitos? E disto comecei a dissecar a disposição dos pontos, distantes em iguais quantidades de espaços de um ponto a outro, na horizontal e na vertical, de determinados cubos perfeitos, tornando-o por isso num objeto figurado em camadas de pontos, que delimitavam quadrados dentro das faces de tais cubos. E estas camadas serão de números inteiros positivos, neste estudo. No caso dos quadrados perfeitos só estão envolvidas duas dimensões: altura e largura. Já no caso dos cúbicos têm-se uma terceira dimensão: a profundidade. Talvez por conta desta última tenha eu pensado em vê-los como camadas sendo sobrepostas em cima de um cubo inicial. Nesta abordagem só considerarei válido o cubo de dimensões: $1 \times 1 \times 1$; o cubo unitário. Muito embora 0 seja, por assim dizer, um cubo perfeito. O que visualmente é impossível de imaginar, ou mesmo construir. E devido a impossibilidade de construir algo com dimensões cada vez mais diminutas, tendendo a zero, resolvo não abordá-lo aqui.



Cubos:(1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729,. . .)

INTERVALOS ENTRE OS CUBOS

8 - 1 =   7

27 - 8 = 19

64 - 27 = 37

125 - 64 = 61

216 - 125 = 91

343 -216= 127

512 - 343 = 169

729 - 512 = 217
.
.
.
A partir de tais valores de intervalos é possível descobrir o intervalo entre eles, de tal modo que seja possível encontrar alguma regularidade perceptível. E disto extrair alguma relação mais compacta.

Logo:

19 - 7 = 12

37 - 19 = 18

61 - 37 = 24

91 - 61 = 30

127 - 91= 36

169 - 127= 42

217 - 169 = 48
.
.

.
De imediato observa-se que os números resultantes da subtrações são múltiplos de 6.

12 = 2 x 6

18 = 3 x 6

24 = 4 x 6

30 = 5 x 6

36 = 6 x 6

42 = 7 x 6

48 = 8 x 6
.
.
.

Perceba que como consideramos o menor cubo perfeito o de dimensões 1×1×1. Então, têm-se que: 1+0•6 = 1, pois ele possui zero camadas sobre ele. E esse um resultante é apenas ele mesmo: um único ponto "cúbico"; o primeiro cubo. Todavia, o segundo cubo é formado da seguinte forma: 1, que é o cubo unitário, mais 1+1•6 = 7, que tem como cubo resultante: 8. O 7 é a quantidade de pontos da cama que completará o cubo unitário, de modo a conseguir o cubo sucessor de um, que possui valor igual a 8.

SINTETIZANDO UMA FÓRMULA

1) RELAÇÃO DE PONTOS POR CAMADA

1ª camada:

1 + 0 x 6 = 1 ponto

2ª camada:

1 + 0 x 6 + 1 x 6 = 7 pontos

3ª camada:

1 + 0 x 6 + 1 x 6 + 2 x 6 = 19 pontos

4ª camada:

1 + 0 x 6 + 1 x 6 + 2 x 6 + 3 x 6 = 37 pontos

.

.

.

Tudo isso acima pode ser resumido num único somatório, desconsiderando o termo multiplicado por zero, uma zero que não afeta o resultado:

$$1+6\cdot\sum_{K=1}^{n} k$$

Resolvendo o somatório obteremos:

$1 + 6 (\frac{1}{2}n (n + 1)) \rightarrow 1 + 3n (n + 1) \rightarrow [3n^2 + 3n +1]$

A relação $3n^2 + 3n + 1$ expressa a quantidade de pontos que deverão ser feitos a mais para gerar o cubo seguinte.

Simplificando a relação e retirando a relação dos números ímpares que compõem os quadrados perfeitos, obtém-se:

$3n^2 + 3n + 1 \rightarrow 3n^2 + n + 2n + 1 \rightarrow$

$[\, n (3n + 1) + (2n + 1) \,]$

Logo, a diferença entre a quantidade de pontos que compõem um quadrado perfeito e os pontos que compõem um cubo é igual a:

$3n^2 + n$

Desta última podemos tirar dois casos interessantes, se $\sqrt{C} = \sqrt[3]{B}$:

1. Quando $n=\sqrt{C}$.

Substituindo (n) por $\sqrt{C}$ em $3n^2+n$, obtém-se:

$3(\sqrt{C})^2 + \sqrt{C} \rightarrow$

$[\, 3C + \sqrt{C} \,]$

2. Quando $n = \sqrt[3]{B}$.

Substituindo (n) por $\sqrt[3]{B}$ em $3n^2 + n$, obtém-se:

$3(\sqrt[3]{B})^2 + \sqrt[3]{B} \rightarrow$

$[\, \sqrt[3]{B} (3\sqrt[3]{B} + 1) \,]$

Exemplo:

Quantos pontos preciso acrescentar ao cubo 8 para obter o cubo 27?

Já sabemos que o cubo perfeito 27 é sucessor do cubo, também perfeito, 8. Deste modo avançamos mais uma camada. Todavia o valor de n da camada é igual a raiz de 27, que é 3. Logo, substituindo n por 3 na relação $3n^2+3n+1$, obtém-se: 37 pontos.

Obs.: disto, percebemos que (n) pode ser substituído por $\sqrt[3]{B}$, em si tratando de cubos antecessores e sucessores, logo:

$3\sqrt[3]{B}\,(\sqrt[3]{B} + 1) + 1$

Veja que $3\sqrt[3]{B}\,(\sqrt[3]{B} + 1)$ expressa a quantidade de termos que estão situados em uma coluna logo abaixo de um cubo perfeito. Isso no caso da organização dos cubos dentro do conjunto dos inteiros não negativos, ou apenas naturais, expressos triangularmente...