

Paracuru-CE

Data: 02/08/2026

Autor: David Dias Marques

E-mail: davidmarquesdias4@gmail.com

Título: 028 - RAIZ QUADRADA DO PRODUTO DE QUADRADOS PERFEITOS

PALAVRAS CHAVES: quadrados perfeitos, quadrados em função de quadrados menores e conhecidos.

A IDEIA BÁSICA DO ESTUDO

Todo e qualquer quadrado perfeito pode ser colocado em função de um outro quadrado perfeito conhecido, quer seja sucessor ou não, quer seja maior ou menor. Como visto também na regressão de Júlia.

No presente estudo, iremos interagir apenas com os quadrados perfeitos, pois suas distâncias são inteiras.

Perceba, se resolvêssemos tratar aqui dos quadrados imperfeitos teríamos números cujo distanciamento, de um para outro, seria irracional. Mesmo assim, as relações obtidas para os perfeitos valeriam para os irracionais.

Com isso quero dizer que vamos partir de uma ideia fácil de entender, para no futuro tentarmos lhe dar com o mais real possível: o irracional. Visto que o mundo se expressa muito mais e melhor através que quantidades imperfeitas, e muitas das vezes mais que quebradas.

Algo a ser mencionado é que utilizaremos a seguinte propriedade do cálculo

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = (x - y)/(\sqrt{x} + \sqrt{y})$$

Útil quando se pretende provar que a função raiz quadrada é contínua ou diferenciável, ou no cálculo de certos limites.

Essa expressa uma distância inteira, quando estivermos falando de quadrados perfeitos, ou uma distância irracional, quando a medida estiver entre um quadrado perfeito e um imperfeito. E o mesmo valerá para dois imperfeitos, cuja distância igualmente será irracional.

I. $\sqrt{k}$ COMO O PRODUTO DE DOIS QUADRADOS PERFEITOS

$$\sqrt{k} = \sqrt{(x \cdot y)} = x + g \cdot \sqrt{x}, \text{ com } x < y.$$

DEMONSTRAÇÃO

$\sqrt{(x \cdot y)} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$, com $x < y$. Logo y pode ser posto em função de x , ou x em função de y .

PRIMEIRO CASO

y em função de x

Como não sabemos se x é ou não quadrado perfeito sucessor de y , diremos que a distância de x até y é medida por g . Sendo g um número inteiro positivo.

$$\sqrt{K} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{(\sqrt{x} + g)^2}$$

Que por sua vez, simplificando, vale

$$\sqrt{k} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{x} \cdot (\sqrt{x} + g)$$

E fazendo a distributiva, obtemos

$$[\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = x + g\sqrt{x}]$$

SEGUNDO CASO

x em função de y

Como não sabemos se y é ou não quadrado perfeito sucessor de x , adotaremos uma distância g , inteira positiva. E se $y = (\sqrt{x} + g)^2$, então $x = (\sqrt{y} - g)^2$. Logo, obtemos que

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{y} \cdot \sqrt{(\sqrt{y} - g)^2}$$

Que por sua vez vale

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{y} \cdot (\sqrt{y} - g)$$

De modo simplificado

$$[\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = y - g\sqrt{y}]$$

Portanto

$$[\sqrt{(x \cdot y)} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = x + g\sqrt{x} = y - g\sqrt{y}]$$

II. $\sqrt{k}$ COMO O PRODUTO DE TRÊS QUADRADOS PERFEITOS

Para quadrados perfeitos que podem ou não serem sucessores entre si.

$$\sqrt{k} = \sqrt{(A \cdot B \cdot C)}, \text{ com } A < B < C.$$

Separando C do radical e aplicando a ideia de (I), obtemos

$$\sqrt{(A \cdot B)} \cdot \sqrt{C}$$

$$(A + g\sqrt{A}) \cdot \sqrt{C}$$

$$A \cdot \sqrt{C} + g\sqrt{A} \cdot \sqrt{C}$$

$$A \cdot \sqrt{C} + g\sqrt{(A \cdot C)}$$

Veja que de A até C temos uma distância h. Logo, colocando o par de quadrados em função do menor, obtemos

$$A \cdot \sqrt{C} + g \cdot (A + h\sqrt{A})$$

Depois, colocando C em função de A, obtemos

$$A \cdot (\sqrt{A} + j) + g \cdot (A + h\sqrt{A})$$

Fazendo a distributiva

$$A \cdot \sqrt{A} + j \cdot A + g \cdot A + g \cdot h \cdot \sqrt{A}$$

Ordenando os termos para melhor visualizar sua simplificação, adquirimos

$$j \cdot A + g \cdot A + g \cdot h \cdot \sqrt{A} + A \cdot \sqrt{A}$$

E de modo simplificado obtemos

$$[(j + g)A + (gh + A)\sqrt{A}]$$

III. $\sqrt{k}$ COMO O PRODUTO DE QUATRO QUADRADOS PERFEITOS

Sejam v , x , y e z quadrados perfeitos, e não necessariamente consecutivos entre si.

$$\sqrt{(v \cdot x \cdot y \cdot z)}, \text{ com } v < x < y < z \text{ e } v, x, y, z \in \mathbb{Z}^+$$

$$\sqrt{(v \cdot x)} \cdot \sqrt{(y \cdot z)}$$

Primeiro caso

$$\sqrt{(v \cdot x)}, \text{ com } v < x$$

$$\text{Logo } \sqrt{(v \cdot x)} = v + h\sqrt{v}$$

Segundo caso

$$\sqrt{(y \cdot z)}, \text{ com } y < z$$

$$\text{Logo } \sqrt{(y \cdot z)} = y + j\sqrt{y}$$

$$\sqrt{k} = \sqrt{(v \cdot x \cdot y \cdot z)} = \sqrt{(v \cdot x)} \cdot \sqrt{(y \cdot z)} = (v + h\sqrt{v}) \cdot (y + j\sqrt{y})$$

Como $v < y$, então é possível colocar y em função de v . Deste modo $y = (\sqrt{v} + t)^2$.

Logo a $\sqrt{y} = \sqrt{v} + t$.

Substituindo, obtém-se duas simplificações possíveis:

PRIMEIRA SIMPLIFICAÇÃO

Seja a $\sqrt{k}$ possível de ser decomposta num produto de quadrados perfeitos, de modo que obtemos

$$\sqrt{(v \cdot x \cdot y \cdot z)}$$

Que por sua vez pode ser igualado a

$$\sqrt{(v \cdot x)} \cdot \sqrt{(y \cdot z)}$$

E colocando cada raiz quadrada de uma das duplas em função do seu menor quadrado perfeito, conseguimos o seguinte produto

$$(v + h \cdot \sqrt{v}) \cdot (y + j \cdot \sqrt{y})$$

Colocando $\sqrt{y}$ em função de $\sqrt{v}$

$$(v + h \cdot \sqrt{v}) \cdot ((\sqrt{v} + t) + j \cdot (\sqrt{v} + t)) \quad (1)$$

Simplificando conseguimos

$$[\sqrt{k} = \sqrt{v} \cdot (\sqrt{v} + h) \cdot (\sqrt{v} + t) \cdot (j + 1)]$$

SEGUNDA SIMPLIFICAÇÃO

$$(v + h \cdot \sqrt{v}) \cdot [(\sqrt{v} + t) + j \cdot (\sqrt{v} + t)] \quad (1)$$

$$(v + h \cdot \sqrt{v}) \cdot (\sqrt{v} + t) + (v + h \cdot \sqrt{v}) \cdot j \cdot (\sqrt{v} + t)$$

$$(\sqrt{v} + t)v + (\sqrt{v} + t)h\sqrt{v} + j(\sqrt{v} + t)v + j(\sqrt{v} + t)h\sqrt{v}$$

$$\sqrt{v}(v + th + vj + thj) + tv + vjt + vh + hjv$$

$$\sqrt{v}(v(1 + j) + th(1 + j)) + tv(1 + j) + vh(1 + j)$$

$$\sqrt{v}(v + ht)(1 + j) + (vt + vh)(1 + j)$$

$$\sqrt{v}(v + ht)(1 + j) + v(t + h)(1 + j)$$

Simplificação resultante, com produtos, somas e apenas um radical conhecido

$$[\sqrt{k} = \sqrt{v} \cdot [(v + h \cdot t) + v \cdot (t + h)] \cdot (1 + j)]$$



David Dias Marques,

Entusiasta Matemático e

Colaborador do WebSite Os Fantásticos Números Primos