

Sequências Numéricas

Sumário

$$\begin{aligned} F_n &= 0, 1, 1, 2, 3, 5, \dots & \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] \\ L_n &= 2, 1, 3, 4, 7, 11, \dots & \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \\ a_n &= 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots, n \\ T_n &= 1, 3, 6, 10, 15, 21, \dots & \frac{n(n+1)}{2} \\ a_{(n)} &= 1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots & 2^n \end{aligned}$$

1. O que são sequências numéricas?
2. Sequências numéricas que são Progressões Aritméticas de ordem k
3. Sequências numéricas que são Progressões Geométricas de ordem k
4. Sequências numéricas do tipo $\Delta^k \text{PG}$
5. Sequências numéricas por recorrência de primeira ordem
6. Sequências numéricas por recorrência de segunda ordem
7. Sequências numéricas notáveis
 - (a) Sequência de Fibonacci
 - (b) Sequência de Lucas
 - (c) Sequência dos números naturais
 - (d) Sequência dos números triangulares
 - (e) Sequência das potências de base 2
8. Séries e convergência de séries

1 — O que são sequências numéricas?

Sequências numéricas são sequências ordenadas de números, indexados pelos números naturais: $a_1, a_2, a_3, \dots$. Ou seja, é uma função $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ onde cada número natural (índice) $1, 2, 3, \dots$ está associado a uma entrada na sequência. A rigor, qualquer sequência aleatória de números é uma sequência numérica. No entanto, têm maior interesse as sequências definidas por uma regra de construção bem definida.

2 — Sequências numéricas que são Progressões Aritméticas de ordem k

Termo geral:

$$a_n = a_1 + \sum_{i=1}^k \frac{1}{i!} \Delta^i \prod_{j=1}^i (n-j)$$

onde k é a ordem da P.A.; Δ^i constante; Δ^i diferença entre termos consecutivos.

$$\begin{aligned} \Delta &= a_2 - a_1 \\ \Delta^2 &= (a_3 - a_2) - (a_2 - a_1) \\ \Delta^3 &= [(a_4 - a_3) - (a_3 - a_2)] - [(a_3 - a_2) - (a_2 - a_1)] \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\prod_{j=1}^i (n-j) = (n-1)^{\underline{k}} \quad \text{fatorial decrescente de base } (n-1)$$

Triângulo Gama Γ :

$$a_{ii} = 1, \quad a_{ij} = a_{i-1,j} \times b_{i-1,0} + a_{i-1,j-1}$$

$$\begin{array}{llll} \Gamma_1: & \downarrow & n & \\ 2: & \downarrow 1 & (n-1) & \\ 3: & 2 \ 3 \ \downarrow 1 & (n-1)(n-2) & = n^2 - 3n + 2 \\ 4: & 6 \ 11 \ 6 \ \downarrow 1 & (n-1)(n-2)(n-3) & = n^3 - 6n^2 + 11n - 6 \\ & \vdots \ \vdots & & \end{array}$$

Obs₁: Para uma PA de ordem k é necessário conhecer $k+1$ termos iniciais.

Obs₂: Dada uma PA de ordem k , as somas parciais de seus termos constituirão uma PA de ordem $k+1$.

Ex: $a_n = (1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots)$

$$\Delta = a_2 - a_1 = 2 - 1 = 1 \quad \text{constante} \quad \Rightarrow \text{PA}_1$$

Termo geral:

$$a_n = a_1 + \sum_{i=1}^1 \frac{1}{i!} \Delta^i (n-1) = a_1 + 1 \cdot \Delta (n-1) = 1 + n - 1 = n$$

$$T_n = (1, 3, 6, 10, 15, 21, \dots) = \sum_{i=1}^n i$$

$$\Delta = a_2 - a_1 = 2$$

$$\Delta^2 = (a_3 - a_2) - (a_2 - a_1) = 3 - 2 = 1 \quad \text{constante} \quad \Rightarrow \text{PA}_2$$

Termo geral:

$$T_n = a_1 + \frac{1}{1!} \Delta(n-1) + \frac{1}{2!} \Delta^2(n-1)(n-2)$$

$$\begin{aligned} T_n &= a_1 + 1 \cdot \Delta(n-1) + \frac{1}{2} \Delta^2(n^2 - 3n + 2) \\ &= 1 + 2n - 2 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (n^2 - 3n + 2) \\ &= 1 + 2n - 2 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n + 1 \\ &= \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

T_n é a soma parcial dos termos da sequência a_n . Portanto, a_n é uma PA de primeira ordem e T_n uma PA de segunda ordem.

Obs₃: A cada PA de ordem k está associado um polinômio de grau k que define o termo geral da PA _{k} .

$$a_n = n, \quad T_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

Ex: Vamos construir uma PA de terceira ordem com Δ^3 constante: $a_1 = 1$; $a_2 = 4$; $a_3 = 9$; $a_4 = 21$.

$$\Delta^3 = 5$$

$$a_n : \begin{array}{cccccc} & 1 & 4 & 9 & 21 & 45 \\ & & 3 & 5 & 12 & 24 \\ & & & 2 & 7 & 12 \\ & & & & 5 & 5 \end{array}$$

$$\Delta^2 = 2, \quad \Delta = 3, \quad a_1 = 1$$

$$a_n = a_1 + \sum_{i=1}^3 \frac{1}{i!} \Delta^i \prod_{j=1}^i (n-j)$$

$$a_n = 1 + \frac{1}{1!} \cdot 3(n-1) + \frac{1}{2!} \cdot 2(n-1)(n-2) + \frac{1}{3!} \cdot 5 \cdot (n-1)(n-2)(n-3)$$

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + 3n - 3 + \frac{1}{2} \cdot 2(n^2 - 3n + 2) + \frac{1}{6} \cdot 5(n^3 - 6n^2 + 11n - 6) \\ &= 1 + 3n - 3 + n^2 - 3n + 2 + \frac{5}{6}n^3 - 5n^2 + \frac{55}{6}n - 5 \\ a_n &= \frac{5}{6}n^3 - 4n^2 + \frac{55}{6}n - 5 \end{aligned}$$

$$a_5 = \frac{5}{6} \cdot 125 - 4 \cdot 25 + \frac{55}{6} \cdot 5 - 5 = \frac{625}{6} - 100 + \frac{275}{6} - 5 = 150 - 105 = \boxed{45}$$

3 — Sequências numéricas que são Progressões Geométricas de ordem k

Enquanto nas progressões aritméticas k é uma diferença Δ^k entre termos consecutivos, nas progressões geométricas k é uma razão q^k entre termos consecutivos.

Para o termo geral, basta pegarmos o termo geral das progressões aritméticas e trocarmos as operações de adição para multiplicação e de multiplicação para potenciação. Assim, temos:

$$PA_1 = a_1 + \frac{1}{1!} \Delta(n-1) \Rightarrow PG_1 = a_1 \cdot q^{(n-1)}$$

$$PA_2 = a_1 + \frac{1}{1!} \Delta(n-1) + \frac{1}{2!} \Delta^2(n-1)(n-2) \Rightarrow PG_2 = a_1 \cdot q^{(n-1)} \cdot q^{2^{(n-1)}(n-2)} \dots q^{2^{(2!)}(n-2)(n-3)}$$

Ex: $a_n = 1, 2, 4, 8, \boxed{16}, \dots$

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{1} = 2 \quad \text{constante}$$

Termo geral:

$$a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)} = 1 \cdot 2^{(n-1)} = 2^{(n-1)}$$

$$a_5 = 2^{(5-1)} = 2^4 = \boxed{16}$$

Ex:

$$\begin{array}{ccccccc} 2 & 10 & 150 & 20250 & \boxed{73811250} \\ 5 & 15 & 135 & 3645 & \\ 3 & 9 & 27 & & \end{array}$$

$$q^2 = 3 \quad \text{constante}, \quad q = 5, \quad a_1 = 2$$

Termo geral:

$$a_n = 2 \cdot 5^{(n-1)} \cdot 3^{n^2-3n}$$

$$a_5 = 2 \cdot 5^4 \cdot 3^{10} = 2 \cdot 625 \cdot 59049 = \boxed{73811250}$$

4 — Sequências numéricas do tipo $\Delta^k PG$

Onde Δ^k são diferenças entre termos consecutivos e PG é uma Progressão Geométrica com razão constante entre termos consecutivos.

Termo geral para $k = 1$: q constante, $q = \Delta_2/\Delta_1$; $\Delta = a_2 - a_1$.

$$a_n = \frac{a_1(q-1) + \Delta(q^{n-1} - 1)}{q-1}$$

$$q = 3, \quad \Delta = 1$$

Ex: $a_n = 1, 2, 5, \boxed{14}, 41, \boxed{122}$

$$\begin{array}{cccccc} \Delta : & 1 & 3 & 9 & 27 & 81 \\ q : & 3 & 3 & 3 & 3 & \end{array}$$

$$a_n = \frac{1(3-1) + 1(3^{n-1} - 1)}{3-1} = \frac{2 + 3^{n-1} - 1}{2} = \frac{3^{n-1} + 1}{2}$$

$$a_4 = \frac{3^3 + 1}{2} = \frac{28}{2} = \boxed{14}, \quad a_6 = \frac{3^5 + 1}{2} = \boxed{122}$$

Termo geral para $k = 2$:

$$a_n = \frac{q(q-1)^2[a_1 + \Delta(n-1)] + (\Delta^2 q)[(n-2) - (n-1)q + q^{n-1}]}{q(q-1)^2}$$

$$\Delta = a_2 - a_1, \quad \Delta^2 = (a_3 - a_2) - (a_2 - a_1), \quad q = \Delta_2/\Delta_1$$

Ex: $a_n = 3, 8, 15, 28, \boxed{59}$

$$\begin{array}{cccc} \Delta : & 5 & 7 & 13 & 31 \\ \Delta^2 : & 2 & 6 & 18 & \\ q : & 3 & 3 & \text{constante} & \end{array}$$

$$a_5 = \frac{(3 \times 2^2)(3 + 5 \times 9) + (2 \times 3)(3 - 4 \times 3 + 3^4)}{3 \times 2^2} = \frac{12 \times 23 + 6 \times 72}{12} = \frac{708}{12} = 59$$

Termo geral para $k > 2$:

$$a_n = \sum_{k=0}^{m-1} \binom{n-1}{k} \Delta^k a_1 + (\Delta^m a_1) \sum_{j=1}^{n-m} \binom{n-1-j}{m-1} j^{-1}$$

Se o limite superior do somatório for menor que o inferior, o resultado é zero.

$$\begin{aligned} a_5 &= \binom{4}{0} \Delta^0 a_1 + \binom{4}{1} \Delta a_1 + (\Delta^2 a_1) \left[\binom{3}{1} q^0 + \binom{2}{1} q^1 + \binom{1}{0} q^2 \right] \\ &= a_1 + 4\Delta + \Delta^2(3 + 2q + q^2) = 3 + 4 \times 5 + 2(3 + 6 + 9) = 59 \end{aligned}$$

Obs: $\Delta^0 a_1 = a_1$; $\Delta^k a_1$ para todo $k > 0$ é Δ^k .

5 — Sequências numéricas por recorrência de primeira ordem

Termo geral: $X_n = g(n) X_{n-1} + h(n)$

$h(n) \neq 0$, $g(n) = C$: Recorrência linear de primeira ordem não homogênea.

$$T_n : 1, 3, 6, 10, 15, 21, \dots \quad C = 1, \quad h(n) = n$$

Por recorrência: $X_1 = 1$, $X_n = X_{n-1} + n$.

Termo geral:

$$\sum_{i=1}^n X_i - X_{i-1} = \sum_{i=1}^n i$$

$$X_n = \sum_{i=1}^n i = \frac{(1+n)n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

X_n é o resultado da soma telescópica $X_i - X_{i-1}$.

$$\begin{array}{rcl} X_1 - X_0 & (X_0 = 0) & \\ + X_2 - X_1 & & \\ X_3 - X_2 & = X_n & \\ \vdots & & \\ X_n - X_{n-1} & & \end{array} \quad \sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

PA: $a_1 = 1, a_n = n; \quad S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(1+n)n}{2}$

Portanto, os números triangulares formam uma sequência por recorrência de primeira ordem linear não homogênea com termo geral:

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

6 — Sequências numéricas por recorrência de segunda ordem

Termo geral: $a X_n = b X_{n-1} + c X_{n-2}$

Equação característica: $ax^2 - bx - c = 0$

Raízes r, s .

1. Se $r = s$: $X_n = (\alpha n + \beta) \cdot r^n$
2. Se $r \neq s$: $X_n = \alpha r^n + \beta s^n$

$$F_n : 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots \quad F_0 = 0; \quad F_1 = 1; \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Equação característica: $x^2 - x - 1 = 0$

Raízes:

$$r = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad s = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \quad r \neq s$$

$$F_n = \alpha r^n + \beta s^n$$

$$1. F_0 = \alpha r^0 + \beta s^0 \Rightarrow \alpha + \beta = 0 \Rightarrow \alpha = -\beta$$

$$F_1 = \alpha \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + \beta \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)$$

$$1 = -\beta \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + \beta \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) = \frac{-\beta - \beta\sqrt{5} + \beta - \beta\sqrt{5}}{2} = -\beta\sqrt{5}$$

$$\therefore \beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

7 — Sequências numéricas notáveis

1 — Sequência de Fibonacci: F_n

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad F_1 = 1, \quad F_2 = 1$$

$$F_n = 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots \quad \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

Propriedades

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(n)}{F(n-1)} = \phi \quad (\text{Razão Áurea} \approx 1,618)$$

A sequência e a razão áurea aparecem constantemente na biologia, pois a proporção baseada em ϕ permite o empacotamento ideal de estruturas sem desperdício de espaço.

$$\frac{F_{16}}{F_{15}} = \frac{987}{610} = 1,618033\dots$$

2. Identidade de Cassini:

$$F(n-1) \cdot F(n+1) - F(n)^2 = (-1)^n$$

$$\text{Ex: } n = 6: F_5 \times F_7 - F_6^2 = (-1)^6 = 1$$

$$5 \times 13 - 8^2 = 65 - 64 = 1$$

$$3. \text{MDC}(F(a), F(b)) = F(\text{MDC}(a, b))$$

$$\text{Ex: } a = 4, b = 8: F(4) = 3, F(8) = 21, \text{MDC}(21, 3) = 3$$

$$\text{MDC}(8, 4) = 4 \Rightarrow F(4) = 3$$

$$4. F(n) = \frac{\phi^n - (1-\phi)^n}{\sqrt{5}}$$

2 — Sequência de Lucas: L_n

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, \quad L_0 = 2, \quad L_1 = 1$$

$$L_n = F_{n-1} + F_{n+1}, \quad 5F_n = L_{n-1} + L_{n+1}$$

$$L_n = 2, 1, 3, 4, 7, 11, \dots \quad \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Propriedades

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n}{L_{n-1}} = \phi, \quad L_n = \phi^n + (1-\phi)^n$$

$$2. F_{2n} = F_n \cdot L_n$$

$$\text{Ex: } n = 3: F_6 = F_3 \times L_3 = 2 \times 4 = 8$$

$$3. L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$$

$$\text{Ex: } L_6 = F_5 + F_7; \quad 18 = 5 + 13 = 18$$

3 — Sequência dos números naturais

$$N_{(n)} = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots, n \quad \text{ou} \quad N_{(n)} = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots, n$$

Contagem de objetos.

Axiomas de Peano

1. O zero é um número natural ($0 \in \mathbb{N}$).
2. Todo o número natural tem um sucessor que também é um número natural (se $n \in \mathbb{N}$, então $S(n) \in \mathbb{N}$).
3. O zero não é sucessor de nenhum número (não existe n tal que $S(n) = 0$).
4. Números diferentes têm sucessores diferentes (se $S(a) = S(b)$, então $a = b$).
5. **Axioma da Indução:** se uma propriedade é válida para o zero e, assumindo que é válida para um número k , conseguimos provar que é válida para o seu sucessor $S(k)$, então a propriedade é válida para todos os números naturais.

Teorema fundamental da aritmética: todo número natural maior que 1 ou é primo ou pode ser fatorado de forma única como um produto de números primos.

Cardinalidade de $\mathbb{N}$: $\aleph_0$ — infinito enumerável.

$$(\mathbb{N}, +) \text{ monóide : } e = 0 \quad (\mathbb{N}, \cdot) \text{ monóide : } e = 1$$

4 — Sequência dos números triangulares

$$T_n = 0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, \dots \quad \frac{n(n+1)}{2}$$

$$T_n = \sum_{i=1}^n i, \quad T_n = \binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)!}{2!(n-1)!}$$

$T_3 = 6$ $\therefore$ triângulo equilátero lado 3 pontos, total 6 pontos.

$$T_n = T_{n-1} + n \quad (\text{recorrência de primeira ordem})$$

Gauss: $T_{100} = \frac{100 \times 101}{2} = 5050$

Propriedades

1. $T_{n-1} + T_n = n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Ex: $T_5 + T_6 = 15 + 21 = 36 = 6^2$

2. $\sum_{i=1}^n i^3 = T_n^2$

Ex: $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 = T_6^2 = 21^2 = 441$

3. $T_n^2 + T_{n+1}^2 = T_{(n+1)^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Ex: $T_3^2 + T_4^2 = T_{16}$; $6^2 + 10^2 = 136 = T_{16} = 8 \times 17$

4. $8T_n + 1 = (2n+1)^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Ex: $n = 3$: $8T_3 + 1 = 7^2 = 8 \times 6 + 1 = 49$

5. Existe um único número triangular primo: $T_2 = 3$; curiosamente 2 é o único primo par.

6. Não existe número triangular congruente a 2 mod 3.

5 — Sequência das potências de base 2

$$a_0 = 1, \quad a_n = 2 \cdot a_{n-1} \quad \forall n > 1$$

$$a_n = 2^n$$

$$a_n : 1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots, 2^n \quad \text{PG } q = 2$$

$$2^{10} : 1024 \text{ kilobyte}$$

$$2^{20} : 1\,048\,576 \text{ megabyte}$$

$$2^{30} : 1\,073\,741\,824 \text{ gigabyte}$$

Propriedades

1. $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

2. $M_n = 2^n - 1$; $2^3 - 1 = 7$ — primo de Mersenne.

3. $2^{n-1}(2^n - 1)$; $2^2(2^3 - 1) = 4 \times 7 = 28$ — número perfeito: $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$.

4. Soma dos termos da linha i do triângulo de Pascal: 2^i .

8 — Séries e convergência de séries

Uma série é a soma dos termos de uma sequência, que pode ser finita ou infinita. As séries infinitas têm maior interesse uma vez que podem convergir para valores finitos, como por exemplo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = 1$$

Mas também existem séries finitas interessantes, como por exemplo:

$$\sum_{i=1}^n i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = T_n^2$$

Séries infinitas convergentes:

1. **Euler:**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

2. **Leibniz:**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots = \frac{\pi}{4}$$

3.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots = e$$

4.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln 2$$

5. **Ramanujan:**

$$\frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!(1103 + 26390n)}{(n!)^4 396^{4n}} = \frac{1}{\pi}$$